第8讲 可化为一元二次方程的分式方程

**课前思考**

上海与南京之间相距300千米．甲乘坐轿车，乙乘坐客车，两人同时从上海出发去南京．30分钟后，甲在乙前面5千米处．甲比乙早1小时到达南京．问：甲、乙两人的速度各是多少？

在这个问题中，有两个等量关系：

甲的速度=乙的速度+10.

甲所用的时间=乙所用的时间-1．

如果设甲的速度是*x*千米/时，则乙的速度是（*x*-10）千米/时，甲所用的时间是小时，乙所用的时间是小时．

于是，可列出方程

如何解这个方程呢？

这是一个分式方程，在七年级时，我们已经学过可化为一元一次方程的分式方程，我们知道可以通过去分母，将分式方程化为整式方程求解．

对方程①两边同时乘以*x*(*x*-10)，得

300(*x*-10)=300*x*-*x*(*x*-10)．②

整理，得*x*2-10*x*-3000=0．

方程②是一个一元二次方程，它是由方程①变形得到的，也就是说方程①是一个可以化为一元二次方程的分式方程，

解分式方程①归结为解一元二次方程②．

解方程②得，*x*1=60，*x*2=-50．将它们分别代入代数式*x*(*x*-10)中，这个代数式的值都不等于0，即它们在方程①的未知数允许取值范围内．经检验，它们都是方程①的根．

而根据问题的实际意义，可知未知数应该大于10，因此*x*2=-50不符合实际意义，应舍去．

所以，原来问题的答案是：甲的速度是60千米/时，乙的速度是50千米/时．

**知识梳理**

**1．分式方程的概念：**

如果方程中只含分式和整式，且分母中含有未知数，那么这个方程是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**2．解分式方程的基本思路：**

解分式方程的基本思路是：通过“\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_”把它转化为一个\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_方程，再求解．这个过程中体现的是“\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_”的数学思想．

答案：两边同时乘以公分母法；整式；化归

**3．解分式方程的基本方法：**去分母法和换元法

**4．解分式方程的一般步骤：**

**5．增根及验根的方法：**

增根：

方程检验的方法：



**典型解析**

**例1：**下列关于*x*的方程中是分式方程的有( )个．

(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

答案：C

**【变式训练】**

下列是分式方程的有 ．

①； ②； ③；

④； ⑤； ⑥

**例2：**解方程：(1)； (2)．

**【变式训练】**

解方程：(1)； (2).

**例3：**解下列分式方程：

**解**．(1)对分母*y*2-4分解因式，原方程变形为

方程两边同时乘以(*y*-2)(*y*+2)，得

*y*+2-4=(*y*-2)(*y*+2)．

整理，得*y*2-*y*-2=0．

解这个整式方程得*y*1=2，*y*2=-1．

检验：当*y*=2时，（*y*-2）(*y*+2)=(2-2)(2+2)=0；

当*y*= -1时，（*y*-2）(*y*+2)=（-1-2）（-1+2）≠0．

因此*y*=2是原方程的增根，舍去，

所以，原方程的根是*y*=-1．

(2)对分母分解因式，原方程变形为

方程两边同时乘以(*x*+1)(*x*+2)（*x*-2），得

(2*x*-5)(*x*-2)+4(*x*+1)=(*x*+1)(*x*+2)．

整理，得*x*2-8*x*+12=0．

解这个整式方程得*x*1=2，*x*2=6．

检验：当*x*=2时，(*x*+1)(*x*+2)（*x*-2)=0；

当*x*=6时，(*x*+1)(*x*+2)（*x*-2）≠0．

因此*x*=2是原方程的增根，舍去．

所以，原方程的根是*x*=6．

**【变式训练】**

解分式方程：

答案：(1)无解；(2)*x*1=0，*x*2=；(3)*x*1=50，*x*2=60；(4)无解

**例4：**【分式的条件求值】已知，求的值．

**【变式训练】**

(1)如果那么；

(2)已知，求的值．

**例5：**用换元法解方程：

(1) (2)．

**【变式训练】**

用换元法解方程：

(1) (2)．

**例6**：解方程组：

**解**．设则原方程组可化为解得

于是，因此， 解得

检验：把*x*=4，*y*=2代入原方程组中各分式的分母，各分母的值都不为零．

所以，原方程组的解为

**例7：**解分式方程：．

**分析：**如果直接去分母，将得到一个一元四次的整式方程，处理起来十分不方便，通过观察可以发现，分式分式可以设则原方程化为

解分式方程①得 *y*2=1．

然后代人当时，得7*x*2+6*x*+10=0，方程无实数根；

当*y*=1时，得3*x*=2，解得

经检验，是原方程的根．

所以，原方程的根是

**例8**：解方程：．

**分析．**通过观察可以发现原方程可化为即运用换元法可以求解．

**解．**原方程可化为

设则原方程可化为

两边同时乘以6*y*，整理得6*y*2-13*y*+6=0．

解这个关于*y*的方程得

经检验，都是方程的根．

(1)当时，得方程

去分母，整理得*x*2+3*x*+1=0．

解得

经检验，都是原方程的根．

(2)当时，得方程

去分母，整理得*x*2-2*x*+1=0．

解得*x*=1．

经检验，*x*=1是原方程的根．

所以，原方程的根是*x*1=1，

**同步训练**

**一、填空题**

1．(1)分式方程的最简公分母是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)解分式方程时，去分母可得整式方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：(1)(*x*-1)2(*x*+1)；(2)*x*2=3*x*

2．(1)分式方程的解是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；(2)分式方程的解是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(3)分式方程的解是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；(4)分式方程的解是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：(1)*x*=±1；(2)*x*1=0，*x*2=-1；(3)*y*=-；(4)*x*=-

3．(1)当*x*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，分式与的值相等；

(2)当*x*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，分式的和等于2；

(3)当*x*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，分式的值互为倒数；

(4)如果分式的值为零，则*x*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：(1)；(2)2；(3)3或；(4)2

4．用换元法解分式方程若设*x*2+*x*=*y*，则原方程可化为关于*y*的方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*y*+4=（或*y*2+4*y*-5=0）

5．用换元法解分式方程，若设，则原方程可化为关于*y*的方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*y*+=5（或*y*2-5*y*+1=0）

6．用换元法解分式方程组若设，则原方程组可以化为整式方程组\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

7．用换元法解分式方程，若设，则原方程可化为关于*y*的整式方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*y*2-3*y*+=0

**二、选择题**

8．下列关于*x*的方程中，无解的有( )个

(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

答案：C

9．下列关于分式方程的增根说法正确的有( )个．

①能使分式方程的最简公分母为零的未知数的值；

②解分式方程一定会产生增根，因而解分式方程必须要检验；

③认真解分式方程，保证每一步都准确，就可以避免产生增根；

④用“两边同时乘以最简公分母法”解分式方程，求得的整式方程的根使得原分式方程的公分母为零，则这个根是原分式方程的增根．

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

答案：A

**三、解答题**

10．解分式方程

答案：(1)*x*1=4，*x*2=-3；(2)无解；(3)无解

11．解分式方程

答案：(1)*x*=-4；(2)*x*=1；(3)无解；(4)*x*=4；(5)*x*1=-3，*x*2=；(6)*x*1=*x*2=2

12．用换元法解分式方程

答案：(1)*x*1=2，*x*2=-8；(2)*x*1=*x*2=；(3)*x*1，2=*x*3，4=；(4)*x*1=5，*x*2=-1

13．用换元法解分式方程组：

答案：(1)

14．用换元法解分式方程组：

答案：(1)

**走进中考**

1．(2017·上海中考)解方程：

答案：*x*=-1（3是增根）

2．(2016·上海中考)解方程：．

解：去分母，得；

移项、整理得；

经检验：是增根，舍去；是原方程的根；

所以，原方程的根是．